Conceitos e controvérsias: zero é um número natural?

Elon Lages Lima

Projeto Apoema

MATEMÁTICA

Editora do Brasil

Conceitos e controvérsias: zero é um número natural?

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in \mathbb{N}$ ou $0 \notin \mathbb{N}$. Como assim?

Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um número natural, pois isso lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em $\mathbb{N}$ não somente quando $x > y$, mas também se $x = y$. Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito frequentemente como índices de termos numa sequência. Uma sequência (digamos, de números reais) é uma função x: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado como a notação x_n (em vez de $x(n)$) e é chamado o "n-ésimo termo" da sequência. A notação $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é usada para representar a sequência. Aqui, o primeiro termo da sequência é x_1, o segundo é x_2 e assim por diante. Se fôssemos considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, então a sequência seria $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, na qual o primeiro termo é x_0, o segundo é x_1 etc. Em geral, x_n não seria o n-ésimo termo e sim o $(n + 1)$-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.

Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não "natural" (em oposição a "artificial"). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma ideia sobre o que devem ser essas coisas. Os exemplos abundam: um número "imaginário" não é mais nem menos existente do que um número "real"; "grupo" é uma palavra que não indica nada sobre seu significado matemático e, finalmente, "grupo simples" é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns de seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de "monstros".

Qual é o valor de 0^0?

A resposta mais simples é: 0^0 é uma expressão sem significado matemático. Uma resposta mais informativa seria: 0^0 é uma expressão indeterminada.

Para explicar essas respostas, talvez seja melhor examinar dois exemplos mais simples de fórmulas desprovidas de significado matemático, que são $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$. De acordo com a definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = b \cdot c$. Portanto, se escrevêssemos $\frac{0}{0} = x$ e $\frac{1}{0} = y$, essas igualdades significariam que $0 = 0 \cdot x$ e $1 = 0 \cdot y$. Ora, TODO número x é tal que $0 \cdot x = 0$ e NENHUM número y é tal que $0 \cdot y = 1$. Por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma "expressão indeterminada" e que $\frac{1}{0}$ é uma "divisão impossível". (Mais geralmente, toda divisão do tipo $\frac{a}{0}$, com $a \neq 0$, é impossível.)

Voltando ao símbolo 0^0 lembramos que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, que é evidente quando $m > n$, continue ainda válida para $m = n$. Pondo $a^m = b$, teremos então $\frac{b}{b} = b^0$, logo $b^0 = 1$ se $b \neq 0$. No caso $b = 0$, a igualdade $\frac{b}{b} = b^0$ tomaria a forma $\frac{0}{0} = 0^0$, o que leva a considerar 0^0 como uma expressão indeterminada. Essa conclusão é ainda reforçada pelo seguinte argumento: como $0^y = 0$ para todo $y \neq 0$, seria natural pôr $0^0 = 0$; por outro lado, como $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$, seria também natural pôr $0^0 = 1$. Logo, o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.

As explicações acima têm caráter elementar e abordam o problema das expressões indeterminadas a partir da tentativa de estender certas operações aritméticas a casos que não estavam enquadrados nas definições originais dessas operações. Existe, porém, uma razão mais profunda, advinda da teoria dos limites, em virtude da qual $\frac{0}{0}$ e 0^0 (bem como outras fórmulas análogas) são expressões indeterminadas.

Escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = A$ para significar que o número A é o limite para o qual tende o valor $f(x)$ da função f quando x se aproxima de a. Sabe-se que, se $\lim_{x \to a} f(x) = A$ e $\lim_{x \to a} g(x) = B$, então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ desde que $B \neq 0$. Por outro lado, quando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então nada se pode garantir a respeito do limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x se aproxima de a. Dependendo das funções f e g que se escolham, pode-se conseguir que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenha como limite qualquer valor c dado de antemão, ou mesmo que não tenda para limite algum. Por exemplo, se tomarmos $f(x) = c(x - a)$ e $g(x) = x - a$, então $\frac{f(x)}{g(x)} = c$ para todo $x \neq a$, logo $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$. Por esse motivo se diz que $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada.

Analogamente, dado *a priori* qualquer número real $c > 0$, podemos achar funções f, g tais que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, enquanto $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = c$. Basta, por exemplo, tomar $f(x)$ e $g(x) = \frac{\log c}{\log x}$; isso faz com que $f(x)^{g(x)} = x^{\frac{\log c}{\log x}} = c$ para todo $x > 0$, logo $\lim_{x \to 0} f(x)^{g(x)} = c$. (Para convencer-se de que $x^{\frac{\log c}{\log x}} = c$, tome logaritmos de ambos os membros dessa igualdade.) Portanto, quando $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ pode ter qualquer valor c, dado de antemão, desde que escolhamos convenientemente as funções f e g. Então se diz que 0^0 é uma expressão indeterminada.

LIMA, Elon Lages. Conceitos e Controvérsias. Texto cedido pela Sociedade Brasileira de Matemática, publicado originalmente na *Revista do Professor de Matemática* (http://www.rpm.org.br/). 01, n. 76, p. 8-11, 2011.